FORMULAIRE

Propriétés des transformées de Laplace et de Fourier

Transformées usuelles

Fabrice Heitz

Sources complémentaires :

- **Y. THOMAS, *Signaux et systèmes linéaires*, Masson, Paris, 1992.**
- **A.V. OPPENHEIM and A.S. WILLSKY with I.T. YOUNG, *Signals and Systems*, Prentice Hall, Signal Processing Series, Englewood Cliffs, 1983.**
- **J.P. DELMAS, *Éléments de théorie du signal : les signaux déterministes*, Ellipses, Paris, 1991.**

Définitions et notations

- **Décomposition en série de Fourier ($x(t)$ périodique) :**

$$
\begin{aligned}
x(t) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{j2\pi k f_0 t} \\
\text{avec} \ : \quad a_k &= \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt
\end{aligned}
$$

- **Transformée de Fourier :**
  - ▷ **Variable f :**

$$
\begin{aligned}
X(f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt \\
x(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{j2\pi f t} df
\end{aligned}
$$

  - ▷ **Variable $\omega = 2\pi f$:**

$$
\begin{aligned}
X(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \\
x(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega
\end{aligned}
$$

- **Transformée de Laplace bilatérale :**

$$X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-st} dt$$

avec : $s = \sigma + j\omega \in C$.

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\Delta} X(s) e^{st} ds$$

où Δ est une droite parallèle à $s = j\omega$ et située dans la région de convergence de $X(s)$.

Définitions et notations (suite)

- **Fonctions usuelles :**

  ▷ **Fonction porte (créneau)**

$$\mathrm{rect}_T(t) = \begin{cases} 0 & |t| > \frac{T}{2} \\ 1 & |t| < \frac{T}{2} \end{cases}$$

  ▷ **Fonction d'Heaviside (échelon unité)**

$$\mathrm{u}(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases}$$

  ▷ **Fonction signe :**

$$\mathrm{sign}(t) = \begin{cases} -1 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases}$$

  ▷ **Fonction sinus cardinal :**

$$\mathrm{sinc}(t) = \frac{\sin \pi t}{\pi t}$$

Série de Fourier : propriétés

Signal périodique	**Coefficients de la série**
$x(t)$ **(période** T_0**)**	a_k
$y(t)$ **(période** T_0**)**	b_k
$Ax(t) \ + \ By(t)$	$Aa_k \ + \ Bb_k$
$x(t-t_0)$	$a_k e^{-jk(\frac{2\pi}{T_0})t_0}$
$e^{jM(\frac{2\pi}{T_0})t}x(t)$	a_{k-M}
$x^*(t)$	a^*_{-k}
$x(-t)$	a_{-k}
$x(\alpha t), \ \alpha > 0$ **(période** $\frac{T_0}{\alpha}$**)**	a_k
$\frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(\tau)y(t-\tau)d\tau$	$a_k b_k$
$x(t)y(t)$	$\sum_{l=-\infty}^{+\infty} a_l b_{k-l}$
$\frac{dx(t)}{dt}$	$jk\frac{2\pi}{T_0}a_k$
$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$ **(avec** $a_0 = 0$**)**	$\left(\frac{1}{jk(\frac{2\pi}{T_0})}\right) a_k$
$x(t)$ **réel**	$a_k \ = \ a^*_{-k}$
$x(t)$ **réel et pair**	a_k **réel et** $a_k \ = \ a_{-k}$
Relation de Parseval : **(signaux périodiques)**	$\frac{1}{T_0}\int_{T_0} \|x(t)\|^2 dt \ = \ \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \|a_k\|^2$

Transformée de Fourier : propriétés

Signal	Transformée (en f)	Transformée (en ω)
$x(t)$	$X(f)$	$X(\omega)$
$x_1(t)$	$X_1(f)$	$X_1(\omega)$
$x_2(t)$	$X_2(f)$	$X_2(\omega)$
$a\,x_1(t) \ + \ b\,x_2(t)$	$a\,X_1(f) \ + b\,X_2(f)$	$a\,X_1(\omega) \ + b\,X_2(\omega)$
$x(t-t_0)$	$e^{-j2\pi f t_0} X(f)$	$e^{-j\omega t_0} X(\omega)$
$e^{j2\pi f_0 t} x(t)$	$X(f-f_0)$	$X(\omega-\omega_0) \quad (\omega_0 = 2\pi f_0)$
$x(at)$	$\frac{1}{\lvert a\rvert} X\left(\frac{f}{a}\right)$	$\frac{1}{\lvert a\rvert} X\left(\frac{\omega}{a}\right)$
$x^*(t)$	$X^*(-f)$	$X^*(-\omega)$
$x(-t)$	$X(-f)$	$X(-\omega)$
$x_1(t) \ * \ x_2(t)$	$X_1(f)\,X_2(f)$	$X_1(\omega)\,X_2(\omega)$
$x_1(t) \ . \ x_2(t)$	$X_1(f) * X_2(f)$	$\frac{1}{2\pi}\,X_1(\omega) * X_2(\omega)$
$\frac{d}{dt} x(t)$	$j2\pi f\,X(f)$	$j\omega\,X(\omega)$
$tx(t)$	$\frac{j}{2\pi}\,\frac{d}{df} X(f)$	$j\,\frac{d}{d\omega} X(\omega)$
$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$	$\frac{1}{j2\pi f} X(f) \ + \ \frac{1}{2} X(0)\delta(f)$	$\frac{1}{j\omega} X(\omega) \ + \ \pi X(0)\delta(\omega)$
$x(t)$ **réel**	$\left\{\begin{array}{ccc} X(-f) & = & X^*(f) \\ \lvert X(-f)\rvert & = & \lvert X(f)\rvert \\ Arg\,X(-f) & = & -Arg\,X(f) \end{array}\right.$	$\left\{\begin{array}{ccc} X(-\omega) & = & X^*(\omega) \\ \lvert X(-\omega)\rvert & = & \lvert X(\omega)\rvert \\ Arg\,X(-\omega) & = & -Arg\,X(\omega) \end{array}\right.$
Dualité	$\left\{\begin{array}{ccc} g(t) & \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} & h(f) \\ h(t) & \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} & g(-f) \end{array}\right.$	$\left\{\begin{array}{ccc} g(t) & \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} & h(\omega) \\ h(t) & \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} & 2\pi g(-\omega) \end{array}\right.$
Relation de Parseval (signaux d'énergie finie)	$\int_{-\infty}^{+\infty} \lvert x(t)\rvert^2 dt$ $= \int_{-\infty}^{+\infty} \lvert X(f)\rvert^2 df$	$\int_{-\infty}^{+\infty} \lvert x(t)\rvert^2 dt$ $= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \lvert X(\omega)\rvert^2 d\omega$

Transformée de Laplace bilatérale : propriétés

Signal	**Transformée**	**RDC**
$x(t)$	$X(s)$	R
$x_1(t)$	$X_1(s)$	R_1
$x_2(t)$	$X_2(s)$	R_2
$ax_1(t) \ + \ bx_2(t)$	$aX_1(s) \ + \ bX_2(s)$	**au moins** $R_1 \cap R_2$
$x(t-t_0)$	$e^{-st_0}X(s)$	R
$e^{s_0 t}x(t)$	$X(s-s_0)$	R **translaté de** s_0
$x(at)$	$\frac{1}{\lvert a \rvert}X\left(\frac{s}{a}\right)$	$s \ \in$ **RDC** **si** $\frac{s}{a} \ \in \ R$
$x_1(t) \ * \ x_2(t)$	$X_1(s)X_2(s)$	**au moins** $R_1 \cap R_2$
$\frac{d}{dt}x(t)$	$sX(s)$	**au moins** R
$-tx(t)$	$\frac{d}{ds}X(s)$	R
$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$	$\frac{1}{s}X(s)$	**au moins** $R \cap \{\mathbf{Re}(s) > 0\}$
Th. valeur finale		$\lim_{s\to 0} sX(s) \ = \ x(+\infty)$
Th. valeur initiale $x(t) = 0, \ t < 0$		$\lim_{s\to +\infty} sX(s) \ = \ x(0^+)$

⚠ **différence avec la transformée de Laplace monolatérale définie par :**

$$\mathcal{L}^+[x(t)] \ = \ X^+(s) \ = \ \int_0^{+\infty} x(t)e^{-st}dt$$

on a la relation :

$$\mathcal{L}^+\left[\frac{d}{dt}x(t)\right] \ = \ sX^+(s) - x(0^-)$$

si $x(t)$ **ne présente pas d'impulsions à l'origine.**

Transformées de Fourier usuelles

$\mathbf{x(t)}$	$\mathbf{X(f)}$	$\mathbf{X}(\omega)$
$\exp(j2\pi f_0 t)$	$\delta(f-f_0)$	$2\pi\,\delta(\omega-\omega_0)$
$\cos(2\pi f_0 t)$	$\frac{1}{2}[\delta(f-f_0)+\delta(f+f_0)]$	$\pi[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)]$
$\sin(2\pi f_0 t)$	$\frac{1}{2j}[\delta(f-f_0)-\delta(f+f_0)]$	$\frac{\pi}{j}[\delta(\omega-\omega_0)-\delta(\omega+\omega_0)]$
$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \exp(j2\pi k f_0 t)$	$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \delta(f-kf_0)$	$2\pi\,\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \delta(\omega-k\omega_0)$
1	$\delta(f)$	$2\pi\delta(\omega)$
$\exp(-a\|t\|)\ ;\ a>0$	$\frac{2a}{a^2+(2\pi f)^2}$	$\frac{2a}{a^2+(\omega)^2}$
$sign(t)$	$v.p.\left(\frac{1}{j\pi f}\right)$	$v.p.\left(\frac{2}{j\omega}\right)$
$\mathrm{u}(t)$	$v.p.\left(\frac{1}{j2\pi f}\right)+\frac{1}{2}\delta(f)$	$v.p.\left(\frac{1}{j\omega}\right)+\pi\delta(\omega)$
$\mathrm{rect}_{2T}(t)$	$2T\,\mathrm{sinc}\,(2fT))=\frac{\sin(2\pi fT)}{\pi f}$	$2T\,\mathrm{sinc}\left(\frac{\omega T}{\pi}\right)=\frac{2\sin(\omega T)}{\omega}$
$2f_0\mathrm{sinc}(2f_0 t)=\frac{\sin(2\pi f_0 t)}{\pi t}$	$rect_{2f_0}(f)$	$rect_{2\omega_0}(\omega)$
$\exp\left[-\pi\left(\frac{t^2}{\sigma^2}\right)\right]$	$\sigma\exp[-\pi(\sigma f)^2]$	$\sigma\exp\left[-\frac{(\sigma\omega)^2}{4\pi}\right]$
$\delta(t)$	1	1
$\delta^n(t)$ (dérivée $n^{\text{ième}}$)	$(j2\pi f)^n$	$(j\omega)^n$
$\delta(t-t_0)$	$\exp(-j2\pi f t_0)$	$\exp(-j\omega t_0)$
$\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(t-kT)$	$\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(f-\frac{k}{T})$	$\frac{2\pi}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(\omega-\frac{k2\pi}{T})$

$\boldsymbol{\omega_0 = 2\pi f_0}$

TELECOM PHYSIQUE STRASBOURG — ECOLE D'INGENIEURS

Transformées de Fourier usuelles

(Fonctions nulles pour $t < 0$)

$\mathbf{x}(\mathbf{t})$	$\mathbf{X}(\mathbf{f})$	$\mathbf{X}(\omega)$
$\mathrm{u}(t)$	$v.p.\left(\frac{1}{j2\pi f}\right) + \frac{1}{2}\delta(f)$	$v.p.\left(\frac{1}{j\omega}\right) + \pi\delta(\omega)$
$\exp(-at)\,\mathrm{u}(t)\ ;\ \mathbf{Re}(a) > 0$	$\frac{1}{j2\pi f+a}$	$\frac{1}{j\omega+a}$
$t\exp(-at)\,\mathrm{u}(t)\ ;\ \mathbf{Re}(a) > 0$	$\frac{1}{(j2\pi f+a)^2}$	$\frac{1}{(j\omega+a)^2}$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\exp(-at)\,\mathrm{u}(t)\ ;\ \mathbf{Re}(a) > 0$	$\frac{1}{(j2\pi f+a)^n}$	$\frac{1}{(j\omega+a)^n}$
$\exp(-at)\sin(2\pi f_0 t)\,\mathrm{u}(t)\ ;\ \mathbf{Re}(a) > 0$	$\frac{2\pi f}{(j2\pi f+a)^2+(2\pi f_0)^2}$	$\frac{\omega}{(j\omega+a)^2+(\omega_0)^2}$
$\exp(-at)\cos(2\pi f_0 t)\,\mathrm{u}(t)\ ;\ \mathbf{Re}(a) > 0$	$\frac{j2\pi f+a}{(j2\pi f+a)^2+(2\pi f_0)^2}$	$\frac{j\omega+a}{(j\omega+a)^2+(\omega_0)^2}$

$\boldsymbol{\omega_0 = 2\pi f_0}$

ANNEXE : Compléments sur les distributions

Les distributions S sont définies de façon générale comme des « fonctionnelles » linéaires continues qui associent à une « fonction test » $\phi(t)$ un scalaire.

Les « fonctions tests » $\phi(t)$ doivent être *continues, indéfiniment dérivables et de support borné.*

Le scalaire associé par la distribution S à la fonction ϕ est noté : $< S, \phi >$.

- **Propriétés des distributions :**

  (I). linéarité :

$$\begin{aligned} < S, \phi_1 + \phi_2 > &= < S, \phi_1 > + < S, \phi_2 > \\ \forall\ \lambda \quad < S, \lambda\phi > &= \lambda < S, \phi > \end{aligned}$$

  (II). continuité :
  Si $\phi_k \rightarrow \phi$ alors $< S, \phi_k > \rightarrow < S, \phi >$.

- **Opérations sur les distributions (définitions)**

  (I). Addition de deux distributions :

$$\boxed{< S + T, \Phi > = < S, \Phi > + < T, \Phi >}$$

  (II). Multiplication par un scalaire :

$$\boxed{< \lambda S, \Phi > = < S, \lambda\Phi > = \lambda < S, \Phi >}$$

  (III). Translation d'une distribution :

$$\boxed{< S(t - a), \Phi(t) > = < S(t), \Phi(t + a) >}$$

  (IV). Transposition :

$$\boxed{< S(-t), \Phi(t) > = < S(t), \Phi(-t) >}$$

  (V). Changement d'échelle :

$$\boxed{< S(at), \Phi(t) > = \frac{1}{|a|} < S(t), \Phi(\frac{t}{a}) >}$$

  (VI). Multiplication par une fonction indéfiniment dérivable ψ :

$$\boxed{< \psi S, \Phi > = < S, \psi\Phi >}$$

  (VII). Dérivation :

$$\boxed{< S', \Phi > = - < S, \Phi' >}$$

  (VIII). Convolution de deux distributions :

$$\boxed{< S * T, \Phi > = < S(t), < T(t'), \Phi(t + t') >>}$$

  lorsque le produit de convolution existe.